Интегралы движения. Лагранжиан частицы в электромагнитном поле
Определение. Интегралом движения называется величина, не меняющаяся в процессе движения.

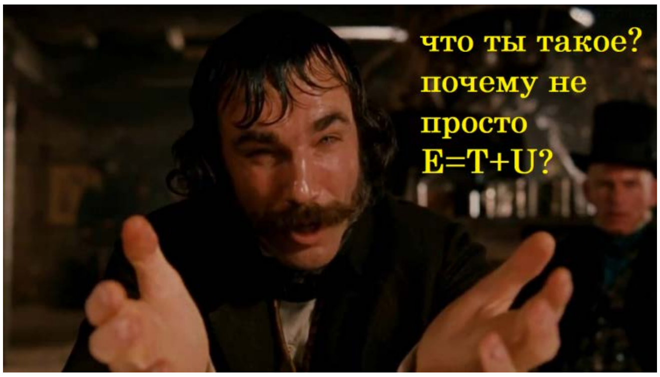
Это, наверное, один из самых неудачных терминов. Он к интегралам не имеет никакого отношения, так ещё и из-за него страдает другой: «ответ выразите в интегралах» придётся говорить «ответ выразите в квадратурах». Что ж поделать – так исторически сложилось.

Примеры:
Как правило ☺ (вот хитрец автор – как правило, но не всегда!) интегралом движения является энергия E=T+U.

А вот ваши семинаристы будут давать другое определение, как они будут говорить, обобщённой энергии:

$$E = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L$$

Шо ты такое? И зачем так сложно, если есть E=T+U?



Во-первых, не всегда лагранжиан представляется в виде суммы T+U. Примером такого лагранжиана является лагранжиан частицы в электромагнитном поле, который не представим в виде суммы T+U:

$$L = \frac{m\vec{v}^2}{2} + \frac{e}{c}\left(\vec{v}\cdot\vec{A}\right) - e\varphi$$

Он состоит НЕ ТОЛЬКО из суммы потенциальной и кинетической энергии. Это связано с наличием магнитного поля: как вы знаете ещё из школы, магнитное поле не потенциально, т.е. в нём не сохраняется энергия. Если **A** во всех точках пространства 0 (т.е. магнитного поля нет), то у нас всё чин-чинарём: $\frac{mv^2}{2}$ -

кинетическая энергия, а $e\varphi$ - потенциальная. А вот если магнитное поле нет, то приколы возникают.

Во-вторых, теоретики есть теоретики. Это нам очевидно, что E=T+U. А теоретикам нет. Для них первопричина функция лагранжа L. А что мы какое-то слагаемое мы называем кин.энергией, какое-то потенциальной – это наше, человеческое. Для них первичен лагранжиан! Знаем лагранжиан L – находим E по формуле $E = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L$ и не паримся, что там кинетическая энергия, а что потенциальная.

Потренируемся на примере экзаменационной задачи, которая предлагается на экзамене в 5-м семестре:

Частица массы m и зарядом e движется в магнитном поле $\vec{H} = H_0\vec{e}_z$ и поле тяжести $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ по поверхности параболоида $az = x^2 + y^2$. Записать функцию Лагранжа в цилиндрических координатах и найти закон движения в квадратурах (a — некоторая постоянная).

Тут у нас возникает одна типовая трудность: нам нужны φ и **A**, а их нам не дали. Дали только магнитное поле **H** (и сказали, что электрического нет).
Вообще в общем случае φ и **A** вы можете выбрать сами, лишь бы они удовлетворяли системе

$$\begin{cases} \vec{H} = \operatorname{rot} \vec{A}, \\ \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\varphi \end{cases}$$

Практически же удобно воспользоваться правилом:
Если магнитное поле однородно и равно в каждой точке H, то удобно перейти в цилиндрическую СК, направив ось z вдоль $\vec{H}$. *Тогда скалярное произведение $\vec{v}\vec{A}$ можно заменить на $\frac{H\rho^2\dot{\varphi}}{2}$.*

И лагранжиан тогда запишется как

$$L = \frac{mv^2}{2} + \frac{e}{c}\frac{H\rho^2\dot{\varphi}}{2}$$

Ой, простите, забыли силу тяжести. Она направлена в той же оси, что и магнитное поле, поэтому

$$L = \frac{mv^2}{2} + \frac{e}{c}\frac{H\rho^2\dot{\varphi}}{2} - mgz$$

Осталось расписать квадрат скорости в цилиндрических СК. Достаём готовую формулу

$$v^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2$$

И окончательно записываем функцию Лагранжа:

$$L = \frac{m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)}{2} + \frac{e}{c}\frac{H\rho^2\dot{\varphi}}{2} - mgz$$

Но у нас в условии сказано, что частица не свободна, а движется по параболиду $az = x^2 + y^2 = \rho^2$. Это забирает у нас одну степень свободы и позволяет нам избавиться от переменной – проще всего от z.

$$z = \frac{\rho^2}{a} => \dot{z} = \frac{2\rho\dot{\rho}}{a}$$

Подставляем в лагранжиан:

$$L = \frac{m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \frac{2\rho\dot{\rho}}{a})}{2} + \frac{e}{c}\frac{H\rho^2\dot{\varphi}}{2} - mg\frac{\rho^2}{a}$$
$$= m\left(\frac{\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \frac{2\rho\dot{\rho}}{a}}{2} + \frac{eH}{2cm}\rho^2\dot{\varphi} - g\frac{\rho^2}{a}\right)$$

Далее начинаются дифуры. Фигачим уравнение Эйлера-Лагранжа

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) + \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

для каждой переменной:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}}\right) + \frac{\partial L}{\partial \rho} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) + \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \end{cases}$$

Подставляем производные, сразу сокращая на массу:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\left(\dot{\rho} + \frac{\rho}{a}\right) + \rho\dot{\varphi}^2 + \frac{\dot{\rho}}{a} + \frac{eH}{cm}\rho\dot{\varphi} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho^2\dot{\varphi} + \frac{e}{c}\frac{H\rho^2}{2m}\right) + 0 = 0 \end{cases}$$

На этом моменте заканчивается физика. Скучная и крайне унылая.

Второе ДУ выглядит просто, с него и начнём.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho^2\dot{\varphi} + \frac{eH}{2cm}\rho^2\right) = 0 => \rho^2\dot{\varphi} + \frac{eH}{2cm}\rho^2 = C => \dot{\varphi} = \frac{C - \frac{eH}{2cm}\rho^2}{\rho^2} = \frac{C}{\rho^2} - \frac{eH}{2cm}$$

Подставляем в первое ДУ:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\dot{\rho}+\frac{\rho}{a}\right)+\rho\left(\frac{C}{\rho^2}-\frac{eH}{2cm}\right)^2+\frac{\dot{\rho}}{a}+\frac{eH}{cm}\rho\left(\frac{C}{\rho^2}-\frac{eH}{2cm}\right)=0$$

Далее пытаемся это представить в виде

$$\frac{\partial F}{\partial t}=0$$

где F – некое выражение. Затаскиваем первое слагаемое под производную:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\dot{\rho}\rho+\frac{2\rho}{a}\right)+\rho\left(\frac{C}{\rho^2}-\frac{eH}{2cm}\right)^2+\frac{eH}{cm}\rho\left(\frac{C}{\rho^2}-\frac{eH}{2cm}\right)=0$$

Для удобства обозначим $\frac{eH}{2cm}=b$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\dot{\rho}\rho+\frac{2\rho}{a}\right)+\rho\left(\frac{C}{\rho^2}-b\right)^2+2b\rho\left(\frac{C}{\rho^2}-b\right)=0$$

Далее давайте раскроем все скобки, кроме производной:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\dot{\rho}\rho+\frac{2\rho}{a}\right)+\frac{C^2}{\rho^3}-\frac{Cb}{\rho}+\rho b^2+\frac{2bC}{\rho}-2bC\rho=0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\dot{\rho}\rho+\frac{2\rho}{a}\right)+\frac{C^2}{\rho^3}+\frac{Cb}{\rho}+\rho(b^2-2bC)=0$$

Интегрируем и затаскиваем под производную:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\dot{\rho}\rho+\frac{2\rho}{a}-\frac{1}{2}\frac{C^2}{\rho^2}+Cb\ln\rho+\frac{\rho^2}{2}\,(b^2-2bC)\right)=0$$

И получаем ДУ уже первого порядка:

$$\dot{\rho}\rho+\frac{2\rho}{a}-\frac{1}{2}\frac{C^2}{\rho^2}+Cb\ln\rho+\frac{\rho^2}{2}\,(b^2-2bC)=C_1$$

$$\dot{\rho}\rho=C_1-\frac{\rho^2}{2}\,(b^2-2bC)-Cb\ln\rho+\frac{1}{2}\frac{C^2}{\rho^2}-\frac{2\rho}{a}$$

$$\frac{d\rho}{dt}=\frac{C_1}{\rho}-\frac{\rho}{2}\,(b^2-2bC)-\frac{Cb\ln\rho}{\rho}+\frac{1}{2}\frac{C^2}{\rho^3}-\frac{2}{a}$$

$$\frac{d\rho}{\frac{C_1}{\rho}-\frac{\rho}{2}\,(b^2-2bC)-\frac{Cb\ln\rho}{\rho}+\frac{1}{2}\frac{C^2}{\rho^3}-\frac{2}{a}}=dt$$

$$t-t_0=\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{d\rho}{\frac{C_1}{\rho}-\frac{\rho}{2}\,(b^2-2bC)-\frac{Cb\ln\rho}{\rho}+\frac{1}{2}\frac{C^2}{\rho^3}-\frac{2}{a}}$$

Есл